

指導実践例 4

2 次関数のグラフと方程式・不等式の指導

—— パソコンを利用したイメージ作り ——

西 川 良 幸

1 はじめに

関数の取り扱いに習熟させて、それらを駆使していろいろな目的に利用できるようにすることは数学教育の重要な目標の一つである。そのためには2次関数などの具体的な関数やそのグラフを取り扱うことによって種々の場合において関数を活用できるように基礎作りをする必要がある。

ところで、関数の部分に限ったことではないが自分が高校生の頃は公式などを丸暗記したり、数式を機械的に操作したりして力まかせに問題を解いていた。しかし近頃は記憶力の衰えのためかイメージをつかまないと問題が考えられなくなってしまった。言い換えるとイメージ化できる問題はこの先何年経っても解けないことはないように思われるが、力まかせに問題を解いていたときは本当には分かっていないというような、今日は解けるが明日はどうだろうかといった漠然とした不安感につきまといわれていたような気がする。

このような点に注意して生徒を観察してみると、数式の操作をそれほど苦にしない比較的成績の良い生徒であっても少し応用的な問題になるとイメージが乏しいためかどう考えて良いか分からなくなってしまうように見受けられる。そこでこちらが問題に対して持っているイメージを伝えて説明しようとするのであるが黒板にチョーク、それに身振りや手振りだけでは思うように伝えることができない。まして生徒がどのようなイメージを抱いたかを知ることがさらに難しい。例えばグラフの移動などを考えているときは頭にグラフが上下左右に動いている様子を思い浮かべていると思うがその様子を伝えるためにはアニメーションのように動きを表現できる手段があればもっと分かりやすく伝えることができる。

そこで比較的容易にイメージを視覚化でき、動きも表現することができるグラフィックスの機能を持つパソコンの利用を考えた。ビデオと違ってその場で自由に設定を変えることができるため「こうなったらどうなるのだろう」といった疑問や要求にすぐ答えることができる。そのため生徒が主体的に学習に取り組みやすく、イメージの定着にも効果的である。また生徒のパソコンの操作を観察することによって問題に対して生徒の抱いたイメージをある程度推測することができると思われる。

Ⅱ ソフトの概要

当初、おおざっぱにグラフの移動や直線との位置関係のイメージをつかませるだけのソフトで、簡単なプログラムにして少し知識があれば誰でも容易に改造できるようにしようと考えていたのであるが、それだけではつまらないと欲張っていろいろ機能を付け加えていった結果、少々「重たい」プログラムになってしまった。どうも一本レールを敷くようなものより道具をいろいろ揃えて「どうぞご自由にお使いください」というようなプログラムを書く傾向が私自身にあるようだ。

基本的には座標軸、放物線、直線が別々に描かれた透明なシートを重ね合わせて各々を単独で動かすということをパソコン上で実現したものである。手軽さという点に関して言えばわざわざパソコンを使わなくとも実際に透明なシートを生徒に配って作業させても良いのであるが、この場合動きに自由度がありすぎて規制しにくいということや、ある点を強調したり判断したりすることが難しいことを考えるとパソコンを利用することが全く「労多くして益なし」という訳でもないように思われる。しかもゲーム的な要素を取り入れることによって（単に音が出るというだけでも）数学嫌いの生徒にとっての学習の動機付けとしての効果も期待できる。

プログラムを起動すると図1のように $y = x^2$ のグラフが表示される。画面左上にはグラフの表す関数式が表示され、グラフの移動にもなって変化する。

図2はグラフを移動したところである。比較のために移動前のグラフも表示されているが色違いになっておりグラフの色と関数式の先頭の菱形の色が対応しているので混乱することはないと思う。（後に元のグラフの表示は煩わしい場合もあるのでスペースキーを押して消去できるように変更した）

(1) グラフなどの移動について

移動には次のキーを用いる。

放物線：矢印キー（ $\leftarrow \rightarrow \uparrow \downarrow$ ）を押す。その方向に1目盛り単位で移動する。

直線：[SHIFT] キーを押しながら矢印キーを押す。左右は1目盛り単位、上下は1ドット単位で移動する。（[ROLLUP]、[ROLLDOWN] キーで上下に1目盛り単位で移動する）

座標軸：[CTRL] キーを押しながら矢印キーを押す。1目盛り単位で移動する。

移動できる範囲は放物線は頂点が表示できる範囲内、直線は表示できる範囲内、座標軸は原点が表示できる範囲内である。移動の限界を越えてキーを押すと音を鳴らして警告する。また直線が表示されていないときに直線を移動するキーを押すと自動的に直線が表示され、放物線の表示は一つになる。

(2) 機能について

画面下部には[f・1]～[f・9]キーに対応した機能が表示されている。（数字キーの1～9を押すことによっても選択可能）各種能は次の通り。

1：凹凸 放物線の2次の係数を入力する。（図3）（頂点は変わらない、直線などは消える）

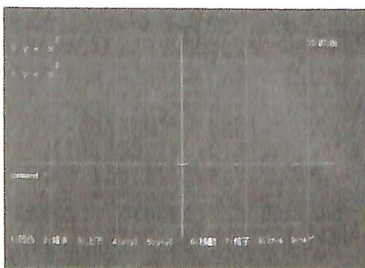


図1 起動時の画面

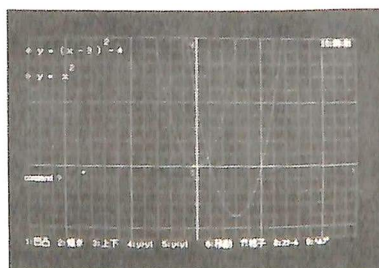


図2 移動したところ

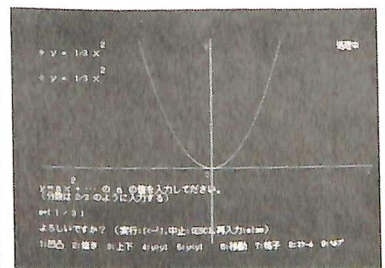


図3 放物線の2次の係数の入力

- 2：傾き 直線の傾きを入力する。（図4）（傾きを変更したときは自動的に原点を通るようになる）
- 3：上下 直線の上側・下側を塗りつぶす。（図5，図6）（1回押す毎に上→下→なしという順に変化する）
- 4： $y > y_1$ 5： $y < y_1$ 放物線が直線の上側または下側にあるような x の範囲を図示する。（図7～図9）
（ y が放物線， y_1 が直線を表す。左から順に大小を判断していく。放物線と直線が一致する所では音が鳴る。実行中に何かキーを押すと実行を一時中断する）
- 6：移動 x 軸方向， y 軸方向への移動量を入力して放物線を平行移動する。（図10）
（聴覚的にも確認する意味で上下左右合わせて2目盛り以上移動するときは音が鳴る）
- 7：格子 座標の格子を表示・非表示にする。（1回押す毎に表示・非表示が切り替わる）
- 8：スケール 座標の1目盛りのスケールを変更する。（図11）
- 9：ヘルプ 操作の手引を表示する。（図12）

(3) 数値の入力・表示について

数値は原則として整数値しか扱えないが放物線の2次の係数や直線の傾きの入力などでは分数を使える。分数は例えば3分の2を2/3というように入力・表示する。

(4) その他

生徒が不用意にプログラムを終了することのないように終了は〔CTRL〕キーを押しながらQを押す。〔STOP〕キーを押すと起動時の状態に戻る。また〔CTRL〕キーを押しながら数字キーの1で座標軸，2で直線，3で放物線の色を好みに合わせて見やすいように変更できる。（各々1回押す毎に7色の間で順次変化する）

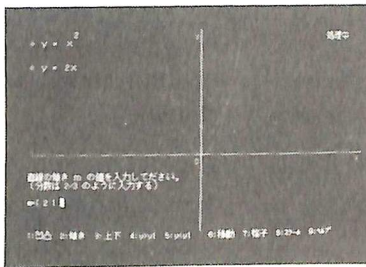


図4 直線の傾きの入力

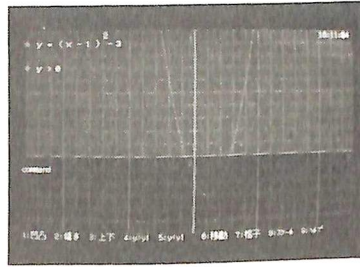


図5 直線の上側の塗りつぶし

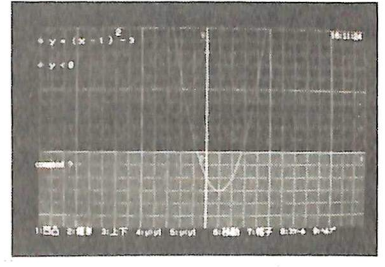


図6 直線の下側の塗りつぶし

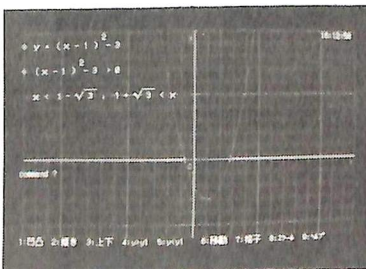


図7 $y > y_1$ の解の図示

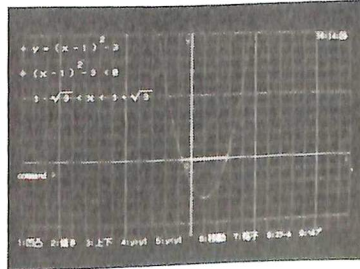


図8 $y < y_1$ の解の図示

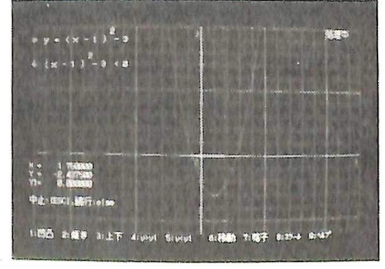


図9 途中で止めたところ

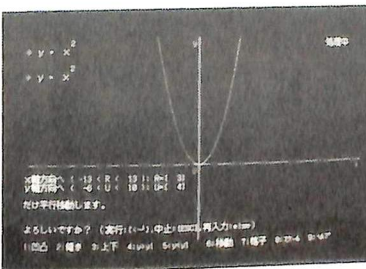


図10 平行移動

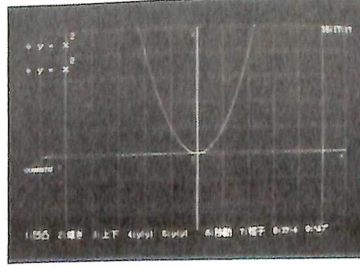


図11 スケールの変更

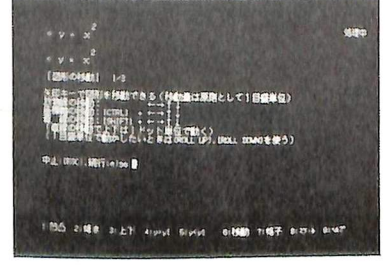


図12 操作の手引(1/3)

Ⅲ 実践例

1 指導目標

- (1) 関数の概念を明らかにする。
- (2) 関数のグラフの意味を理解させ、グラフの移動について指導する。
- (3) 関数にはグラフ・式など種々の表現があることや、それらの表現を目的に応じて使い分けことを理解させる。
- (4) 2次関数の特徴をグラフによって明らかにし、それらの特徴を利用して関数の最大・最小を求めたり、方程式・不等式などの種々の問題を解決することを指導する。
- (5) 簡単な分数関数、無理関数を取り扱い、関数についての理解を深める。
- (6) 無理関数に関連して逆関数を考え、関数とその逆関数のグラフの間の関係について調べさせる。

2 指導計画

関数とグラフ	2 時間	分数関数	3 時間
2 次関数のグラフ	3 時間	無理関数	2 時間
2 次関数の最大と最小	3 時間	逆関数とグラフ	1 時間
グラフと方程式・不等式	4 時間	問題演習	1 時間
問題演習	1 時間（本時）		

3 指導のねらいと構想

指導するクラスは男子23人、女子22人、計45人のクラスで授業に対する集中力を欠く生徒もいる。入学時の基礎学力テストでは学年の中で上位の方であったが各学期の定期考査では70点未満の生徒の比率が学年全体の比率と比較して10%～15%多いクラスである。この場合パソコンを目の前に置いて数学の内容の説明を注意深く聞かせるのは困難と思われるので、一通り2次関数の学習が終わって問題演習をする場面での利用を考えた。演習用のプリントを配布して、パソコンを自由にに使わせて問題を解かせる。問題にある関数の式を直接入力できないため問題に合うように嫌でもグラフを移動しなければならない。その段階で移動や直線との位置関係のイメージが形成されるのではないかと期待している。また演習の場合なかなか問題に手がつけられないという生徒も少なくないがパソコンがあればとにかく操作はできるし、物珍しさも手伝って積極的に取り組めるのではないだろうか考えた。

授業形態としては生徒が操作に慣れていて本当にパソコンを道具として使いこなせるのであれば1人1台が理想的であるが、試行錯誤的に学習するときには「3人よれば文殊の知恵」という諺もあるように2～3人に1台が適切であろう。特にイメージをつかむという観点に立つと他人の操作している画面を見ることは自分の盲点をついている事も多く重要である。しかし今回は台数の制限もあり6グループを作り、7～8人に1台で授業を行った。

4 指導略案

指 導 項 目	生 徒 の 活 動	留 意 点
本時の説明	教師の説明を聞き、学習目標を確認する。	簡単に既習事項を復習する。
操作手引（資料1）の配布、操作方法の説明	キーの位置と名称、操作の仕方を覚える。 プリントの指示通りに操作して使用法を練習する。	操作・使用法に習熟させる。 全員が操作しているか確認する。
演習問題（資料2）の配布、生徒の自主学习	必要に応じてパソコンを操作しながら問題を解く。 または解答後パソコンの画面で確認する。 仲間同士パソコンを使って問題を説明したりされたりして理解を深める（パソコンを使えば口頭だけの場合と違い説明は比較的容易であろう）	適宜パソコンの利用を促す。パソコンを使わずに解答している生徒には画面上で解答を確認させたり、解けない生徒に対してパソコンを使って問題を説明させる。
問題の回収とコメント		

IV 今後の課題と反省

準備にもたつき機械の配線が授業時間に食い込んで十分な時間が取れなかったうえ、キーボードと本体を結ぶコードの接触不良で1台使用できないというアクシデントも重なって、あまりパソコンに触れない生徒も出てしまった。プリントの感想の欄を見ると時間が少なかったため約3割が白紙、3割が「触れない」、「操作が分からない」、「光が反射して画面が見えない」などの否定的な意見、残り4割が「すごい」、「面白い」、「問題が解けた（でもパソコンを使わないと分からない）」といった肯定的な意見だった。しかし否定的な意見でも「使えたら面白いだろう」とも書いてあるものが多く、十分な時間と台数があればより効果的であったと残念に思う。また台数が少ないときは事前に各グループから1人選んで操作を学習させて教師役をやらせるというような工夫や構想をよく練る必要があると反省している。ところで今回の授業のためにパソコンを運ぶのにかなり労力を使った。授業でちょっと使うためにまたこんな苦勞をしようと思うとよほどのソフトでなければ二の足を踏んでしまう。思いついたときにすぐ利用できるような電卓並の手軽さがなければ使わなくなってしまうのではないだろうか。今回のソフトも授業中プレゼンテーション用として使うと説明しやすいと思う場面が何度かあったが結局利用せずに終わった。何度も利用するうちにソフトの内容も利用方法も洗練されていくと思うのだが残念である。

ソフトについては最初グラフの移動の所だけを考えて作ったので、移動が1目盛り単位で式も平方完成した形になっているが、式変形してこの形にすることを考えると少なくとも $\frac{1}{2}$ 目盛り単位に移動して式の表示も切り替えられるようにした方がよい。また機能が並列的に並んでおり、戸惑う生徒もいたので階層的にして等号の入った不等式にも対応できるように機能を充実させたい。技術的な面では放物線をスムーズに移動させる方法などで、パソコン（プログラム言語）の性能のため本質的でない苦勞をしているので一層の高性能・小型・低価格化を熱望している。また前に述べたように最初から全体を構想して作ったソフトではないためどうもプログラム内の変数が交錯しているようで、式が正しく表示されないときがある。利用するときは注意してほしい。

資料 1

【操作の手引き】

- ↑
← → キー（矢印キー）を押すとその方向に動く。
↓
- * グラフを動かしたいとき： ← → キー（矢印キー）を押すとその方向に動く。
- * 動かすと元のグラフが残るので、消したいとき：
スペースキー（下中央にある横に長いキー）を押すと消える。
- * 最初の状態にもどしたいとき：[STOP]キー（左上にある）を押す。
- * 格子（縦横の線）を消したい（出したい）とき：
[f·7]キー（一番上の列にある）か数字の7のキーを押すと一回毎に出たり消えたりする。
- * グラフの凹凸（2次の係数）を変えたいとき：次の(1)～(4)の操作を行う。
(1) [f·1]キー（一番上の列にある）か数字の1のキーを押す。
(2) 希望の数値を入力する。（例えば-1と押す）
(3) リターンキー（ \square ）を押す。
(4) 確認を求めてくるので、良ければもう一度リターンキーを押す。

そのほかに不等式に関連して次のような事ができる。

- * [f·3]キーまたは数字の3のキーを1回押す毎に
x 軸の上側($y > 0$ の部分)→x 軸の下側($y < 0$ の部分)→x 軸($y = 0$ の部分)
の順に切り替わります。
- * [f·4]キーまたは数字の4のキーを押すと
グラフがx 軸の上側にあるようなxの範囲($y > 0$ の解)を
左の方から順に調べて表示する。
(途中で何かキーを押すと実行を一時中断する。再開はもう一度キーを押す。)
- * [f·5]キーまたは数字の5のキーを押すと
グラフがx 軸の下側にあるようなxの範囲($y < 0$ の解)を
左の方から順に調べて表示する。
(途中で何かキーを押すと実行を一時中断する。再開はもう一度キーを押す。)

では使い方の練習をしてみましょう。指示にしたがって順番に操作してください。

- (1) [STOP]キーを押してください。
これが最初の状態です。 $y = x^2$ のグラフが表示されます。
- (2) 矢印キーを押して適当に上下左右に動かしてください。
矢印キーの方向に1目盛りずつグラフが移動します。
画面の左上にグラフを表す2次関数が表示されます。
動かす前の元のグラフも表示されています。
- (3) スペースキーを押してください。（一度で駄目ならもう一度押す）
元のグラフが消えて2次関数のグラフは一つになります。
- (4) [f·7]キーを1回押してください。格子が消えます。
- (5) [f·7]キーをもう1回押してください。格子が表示されます。
- 次にグラフの凹凸を変えてみましょう。
- (6) [STOP]キーを押して最初の状態にもどしてください。
- (7) [f·1]キーを押してください。
現在の数値が表示され、新しい数値の入力を求めてきます。
- (8) -1と入力してリターンキーを押してください。
本当にこれでいいかどうか確認を求めてきます。
- (9) これでいいのもう一度リターンキーを押してください。
 $y = -x^2$ のグラフが表示されます。
- (10) スペースキーを押して元のグラフが残らないようにして、
また適当に矢印キーを使ってグラフを動かしてみてください。

次に2次不等式 $x^2 - 4 < 0$ を解いてみましょう。

- (11) [STOP]キーを押してください。
- (12) スペースキーを押してください。
- (13) [↓]キーを押して $y = x^2 - 4$ のグラフを表示してください。
- (14) [f·5]キーを押してください。
左から順にxの値がこのときはグラフがx 軸の上側にあるか下側にあるか
判断し下側にあるときはx 軸を太く表示しグラフまで点線を引きます。
最後に答 $(-2 < x < 2)$ を表示します。
(答を見なくとも分かるように勉強してください)
- (15) [STOP]キーを押してください。

それではプリントの問題をやってみましょう。
問題毎に交代するなどして皆がコンピューターを使ってみてください。

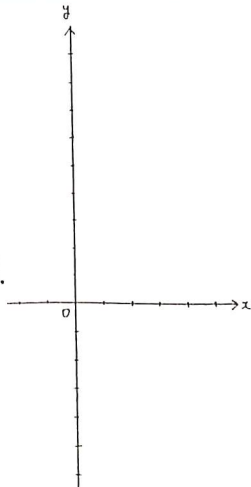
資料 2

数学 I 演習問題 1年 組 番氏名

1. 次の2次関数のグラフとx軸との共有点の個数を調べよ。
- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| (1) $y = (x + 3)^2$ | (9) $y = -(x + 3)^2$ |
| (2) $y = (x - 4)^2$ | (10) $y = -(x - 4)^2$ |
| (3) $y = x^2 - 2$ | (11) $y = -x^2 - 2$ |
| (4) $y = x^2 + 1$ | (12) $y = -x^2 + 1$ |
| (5) $y = (x - 3)^2 + 2$ | (13) $y = -(x - 3)^2 + 2$ |
| (6) $y = (x + 4)^2 + 2$ | (14) $y = -(x + 4)^2 + 2$ |
| (7) $y = (x + 4)^2 - 1$ | (15) $y = -(x + 4)^2 - 1$ |
| (8) $y = (x - 3)^2 - 1$ | (16) $y = -(x - 3)^2 - 1$ |
2. 次の2次関数のグラフとx軸との共有点の個数はkの値によってどの様に変わるか調べよ。
- | | |
|-------------------------|------------------------|
| (1) $y = (x - 2)^2 + k$ | (2) $y = x^2 - 4x + k$ |
|-------------------------|------------------------|

3. 次の問いに答えよ。
- (1) $y = x^2 - 6x + 5$
 $= (x - p)^2 + q$
とするときp, qの値を求めよ。

- (2) $y = x^2 - 6x + 5$ のグラフを描け。
- (3) $y = x^2 - 6x + 5$ のグラフを利用して
2次不等式 $x^2 - 6x + 5 < 0$ を解け。



◎コンピューターを使ってどのように感じましたか。
感想など何でも良いですから書いてください。

5. まとめと今後の課題

この研究では数学の授業の中で、パソコンを利用して生徒の理解を援助するための方策を実践的に追求してきた。この追求の過程では、よりよいソフトの開発とその活用方法の研究が中心となったが、それらの基本になる、生徒の数学理解を妨げている原因の分析やそれを踏まえた具体的な授業の改善・工夫の方策などが重要な課題となった。特に、生徒の理解を妨げている原因の分析は、それを誤ると授業の改善・工夫の方策は当然見当はずれのものとなり、それを踏まえて開発されたソフトに至っては全く役に立たないということになってしまう。分析は直接研究にあたった我々5人の指導の経験を中心に行ったが、それだけでなく、教育センターの研修講座の中で多くの数学科教師の目を通してソフトの作成過程やその利用法について検討を行うなど、慎重を期した。またソフトを利用する授業だけを焦点化して検討するのではなく、一連の指導過程の中にその授業を位置づけ、特に生徒の他の授業における学習体験との関連を重視してその授業を行うよう心がけた。その結果、授業などでの検証によると各々のソフトはほぼねらい通りに生徒の理解を援助し得たと評価されるし、その利用方法も的確であったと考えている。また生徒の反応も良好で、積極的に主体的な学習場面が随所に見られた。

一方、ソフト開発のための技術的な問題点は別として、今後の課題として残されたものも多く、例えば次のような点があげられる。

- ① パソコン画面上の生徒への説明や指示が、生徒の学習状況にあっているかどうか不安があった。的確でない場合も相当にあったと考えられる。
- ② この研究のような、生徒の数学理解の援助という観点からの利用では、理解を妨げる原因やその対策など、ソフトを開発する以前の基礎的な事柄の掘り下げがもっと必要である。
- ③ 各学校で教師が自由に使えるパソコンの台数が少なく、利用の可能性が極端に制約されている。
- ④ ソフトを開発する教師の負担の軽減という観点からは汎用性のあるソフトを開発する必要があるが一方でそれは“どこでも使えないソフト”になる可能性もあり、これらのかねあいが難しい。
- ⑤ パソコンを使う授業では、例えば小集団学習での利用などのように、授業の方法とソフトの関係が強く出てくる。高校の教師には一斉・講義調の授業の経験しかない場合が多く、この面からソフトを使いこなすことができないことも考えられる。

パソコンの利用がいわゆる教育機器の利用の範疇に入ること間違いのないと思うが、そうだとすれば我々高校の数学教師が、一部の教師を除いて、教育機器を利用しての授業に慣れていないという事実を目を向ける必要がある。それまではほとんどチョークと黒板だけを使い、講義一辺倒で授業を行ってきた数学教師が、たいした準備なしにパソコン（＝教育機器）を利用した授業に取り組むといっても実際は困難な点がたくさんあると考えられる。その原因はパソコンやソフトだけにあるのではなく、多くは教師の側にあることに注意しなければならない。パソコンの充実した機能を日々の授業の中に活用しない手はない。しかし、そのためには我々教師が毎日の指導のあり方を見直し、必要があれば授業の方法や教育機器の利用などについて、もう一度基礎的・基本的な研修を積んでいこうとする姿勢が大切と言えるのではないだろうか。